



GIẢI TÍCH

Chương 4: GIỚI HẠN

Bài 1

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ (tiết 1)

I

GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

II

ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

III

TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

I GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1 Định nghĩa

Bài toán mở đầu

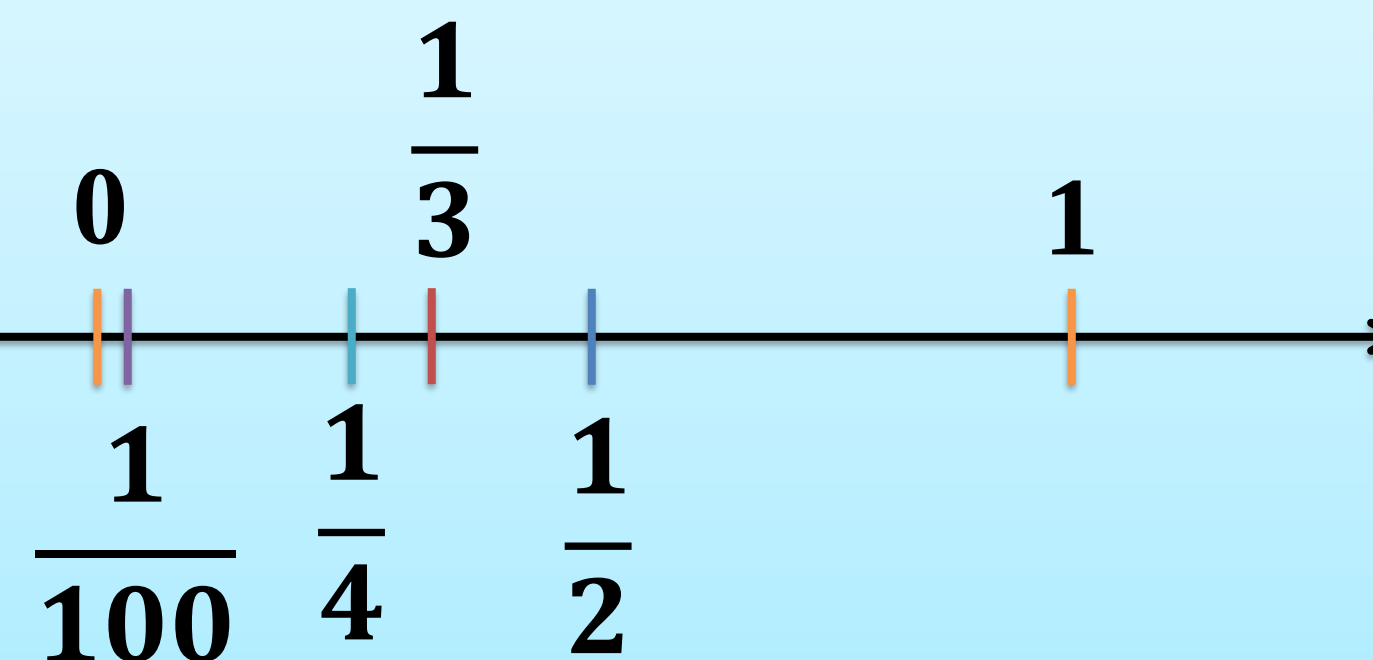
Cho dãy số (U_n) với $U_n = \frac{1}{n}$.

a) Hãy viết dãy số dưới dạng khai triển.

b) Hãy biểu diễn các số hạng của dãy số trên trục số.

c) Hãy tính khoảng cách từ $u_1; u_{10}; u_{100}; u_{2020}; \dots$ đến 0.

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{100}; \dots$



Khoảng cách từ u_1 tới 0 là $|u_1| = 1$ Khoảng cách từ u_{100} tới 0 là $|u_{100}| = \frac{1}{100}$

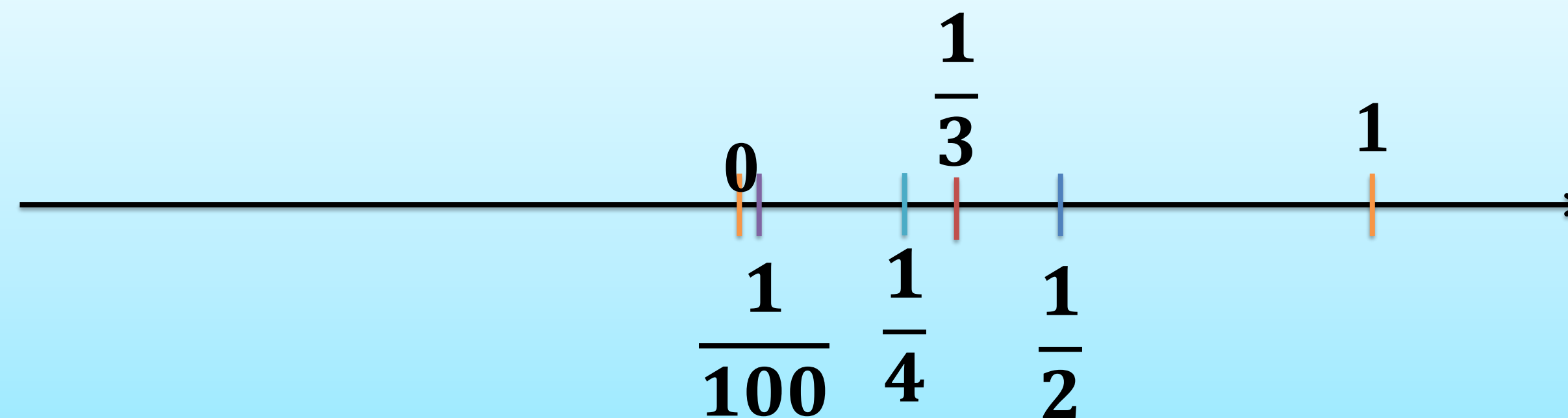
Khoảng cách từ u_{10} tới 0 là $|u_{10}| = \frac{1}{10}$ Khoảng cách từ u_{2020} tới 0 là $|u_{2020}| = \frac{1}{2020}$

I GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1 Định nghĩa

Bài toán mở đầu

Cho dãy số (U_n) với $U_n = \frac{1}{n}$.



Câu hỏi 1: Em có nhận xét gì về sự thay đổi của các khoảng cách này khi n trở nên rất lớn?

Trả lời: Khi n trở nên rất lớn các khoảng cách này càng ngày càng giảm nhỏ gần giá trị 0.

Câu hỏi 2 : Bắt đầu từ số hạng u_n nào của dãy số thì khoảng cách từ u_n đến 0 nhỏ hơn 0,0001?

$$\text{Ta có: } |u_n| < 0,0001 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < 0,0001 \Leftrightarrow n > 10000$$

$\Rightarrow$ Từ $n = 10001$ trở đi thì khoảng cách từ u_n đến 0 nhỏ hơn 0,0001

Kết luận: $|u_n| = \frac{1}{n}$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi nghĩa là $|u_n|$ có thể bé bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn.

I

GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ



Định nghĩa 1

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = 0$ hoặc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hoặc $u_n \rightarrow 0$



Định nghĩa 2

Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn là số a (hay v_n dần tới a) Khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - a) = 0$.

Kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$ hoặc $\lim v_n = a$ hoặc $v \rightarrow a$

I GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

2 Một vài giới hạn đặc biệt

① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$, với k nguyên dương

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$

④ Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c = c$

II ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Định lý 1



a) Nếu $\lim u_n = a$; $\lim v_n = b$. Khi đó:

① $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = a + b$

② $\lim(u_n - v_n) = a - b$

③ $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$

④ $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} (b \neq 0)$



b) Nếu $u_n \geq 0, \forall n$ và $\lim u_n = a \geq 0$
Thì $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

c) $\lim |u_n| = |a|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{a}$

VÍ DỤ MINH HOẠ



Ví dụ 1

Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n}$.



Bài giải

$$\text{Ta thấy: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$$

VÍ DỤ MINH HOẠ



Ví dụ 2

Tìm $\lim \frac{3n^2 - n}{1 + n^2}$.



Bài giải

Chia cả tử và mẫu số cho n^2 ta được:

$$\lim \frac{3n^2 - n}{1 + n^2} = \lim \frac{3 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + 1} = \frac{3}{1} = 3$$

VÍ DỤ MINH HOẠ



Ví dụ 3

Tìm $\lim \frac{\sqrt{1+4n^2}}{1-2n}$



Bài giải

Chia cả tử và mẫu số cho n ta được:

$$\lim \frac{\sqrt{1+4n^2}}{1-2n} = \lim \frac{\sqrt{\frac{1+4n^2}{n^2}}}{\frac{1}{n}-2} = \lim \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+4}}{\frac{1}{n}-2} = \frac{\sqrt{4}}{-2} = -1$$

III TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Ví dụ 1

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{2^n}$. Hãy viết dãy (u_n) dưới dạng khai triển và nhận xét về công bội của nó.

Bài giải

Dạng khai triển của (u_n) là: $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots; \frac{1}{2^n}; \dots$

Nhận xét: Dãy số trên là một cấp số nhân vô hạn có công bội $q = \frac{1}{2}$ mà trong đó $|q| < 1$
Ta thấy $|u_n|$ càng ngày càng giảm
Ta gọi (u_n) trên là cấp số nhân lùi vô hạn.

Định nghĩa

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn

III TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN



Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) . Ta đã biết : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$

Vì $|q| < 1$ nên $\lim q^n = 0$. Nên $\lim S_n = \lim \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{u_1}{1 - q}$

Vậy: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \lim S_n = \frac{u_1}{1 - q} \quad (|q| < 1)$.



Công thức



$$S = \frac{u_1}{1 - q}$$

III TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Ví dụ 3

a) Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_n = \frac{1}{3^n}$.

b) Tính tổng:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$$

c) Viết số thập phân $0,(1)$ dưới dạng phân số.

Bài giải

a) Cấp số nhân $u_n = \frac{1}{3^n}$ có

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{3}; q = \frac{1}{3} \\ S &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots \\ &= \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Các số hạng của tổng lập thành cấp số nhân lùi vô hạn với

$$\begin{aligned} u_1 &= 1; q = -\frac{1}{2} \\ \text{Vậy } S &= \frac{u_1}{1-q} \\ &= \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có: } 0,(1) &= 0,111\dots \\ &= 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \end{aligned}$$

Các số hạng của tổng lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{10}; q = \frac{1}{10} \\ \text{Khi đó } 0,(1) &= \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$



TÓM TẮT BÀI HỌC

**GIỚI HẠN
DÃY SỐ
(Tiết 1)**

Định nghĩa

Định lí về giới hạn hữu hạn

**Tổng của cấp số
nhân lùi vô hạn**